Mise en situation
La réciproque d'une fonction

Théorie

La réciproque : La réciproque d'une fonction s'obtient en inversant le rôle des variables, c'est-à-dire que la variable indépendante (x) devient la variable dépendante (y) et vice-versa. La réciproque d'une fonction n'est pas nécessairement une fonction. La réciproque de la fonction f se note f^{-1}.

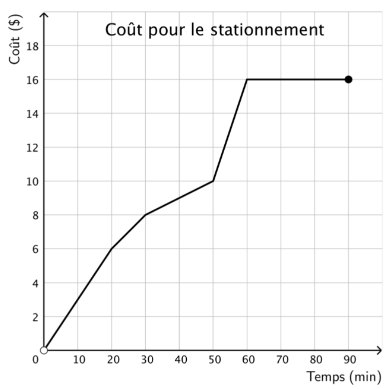
Exemple :

Une personne stationne sa voiture dans un stationnement privé.

Fonction

Le coût à débourser par la personne est déterminé selon le temps d'utilisation du stationnement.

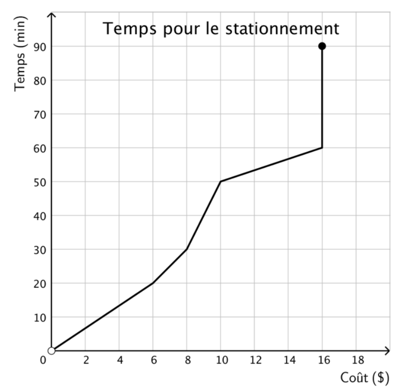
Variable indépendante (x) : Temps (min)
Variable dépendante (y) : Coût ($)



Réciproque

Le temps d'utilisation du stationnement est déterminé selon ce que la personne veut payer.

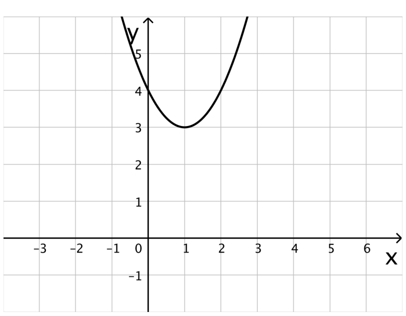
Variable indépendante (x) : Coût ($)
Variable dépendante (y) : Temps (min)

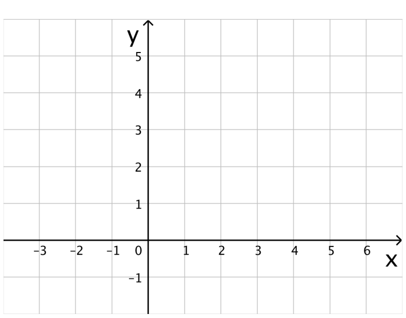


Exercices

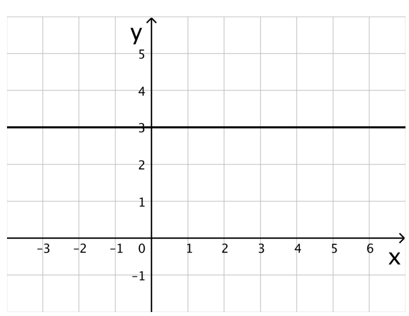
1. Représente graphiquement la réciproque des fonctions suivantes.

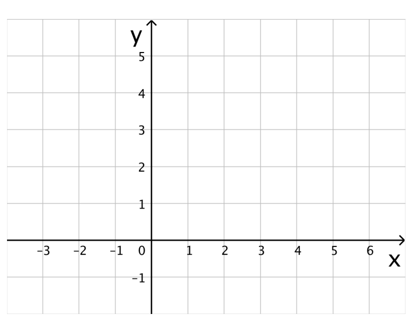
a)



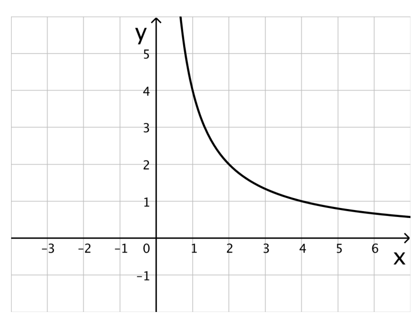


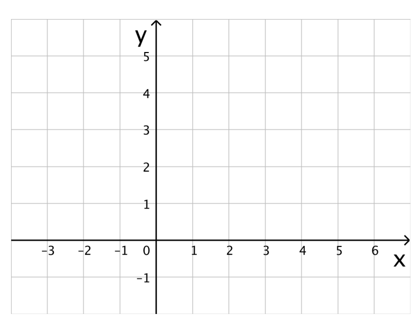
b)





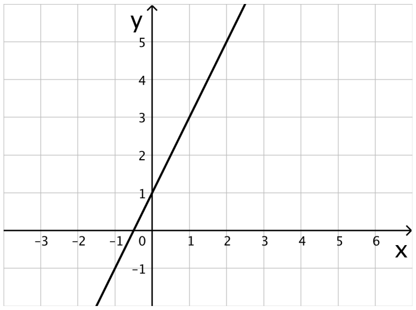
c)



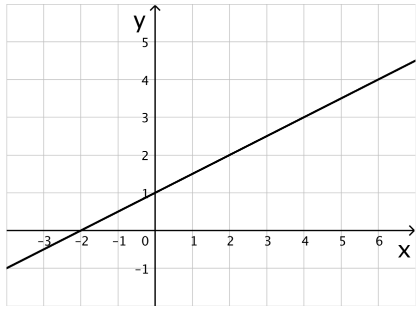


2. Associe les fonctions qui sont réciproques l'une de l'autre.

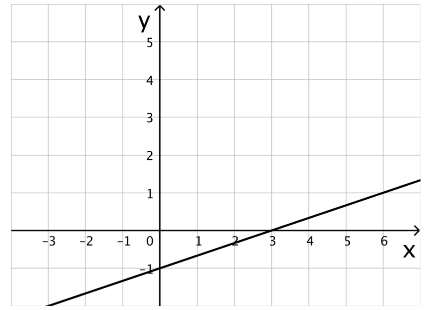
Fonction A



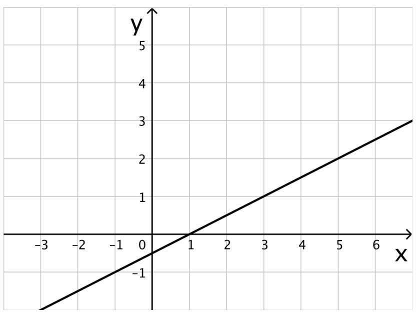
Fonction B



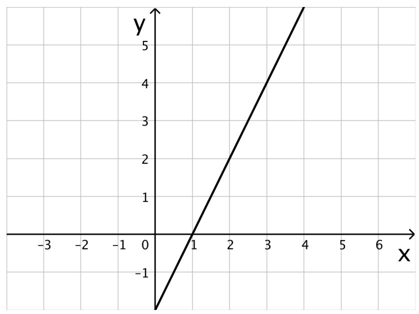
Fonction C



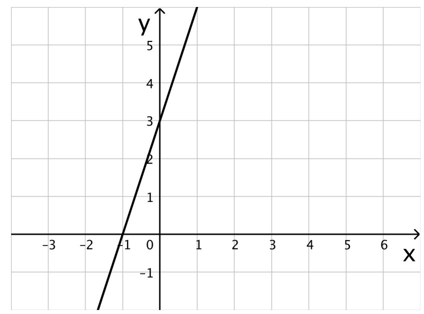
Fonction D



Fonction E



Fonction F



Réponse : Fonctions _____ et _____ Fonctions _____ et _____ Fonctions _____ et _____

Théorie : Déterminer la règle de la réciproque d'une fonction affine et rationnelle

	Exemple 1	**Exemple 2**	**Exemple 3**
Étape 1 : Intervertir la variable indépendante (x) et la variable dépendante (y)	$y = 4x + 8$ ↓ ___ = 4 ___ + 8	$y = \frac{x}{3} - 2$ ↓ ___ = $\frac{\_\_\_}{3}$ = -2	$y = \frac{16}{x}$ ↓ ___ = $\frac{16}{\_\_\_}$
Étape 2 : Isoler la variable dépendante (y)	$x = 4y + 8$ ____________ ____________	$x = \frac{y}{3} - 2$ ____________ ____________	$x = \frac{16}{y}$ ____________ ____________
La règle de la réciproque est :	____________	____________	____________

3. Dans chaque cas, détermine la règle de la réciproque des fonctions données.

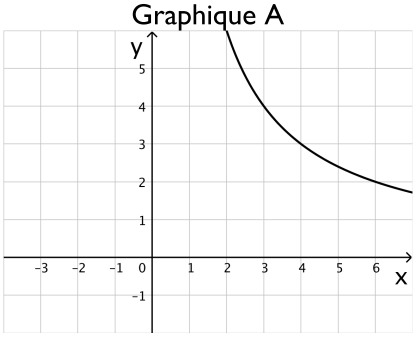
a) $y = 3x - 6$ b) $y = \frac{x}{2} + 1$ c) $y = 12 - 4x$

Réponse : ________________ Réponse : ________________ Réponse : ________________

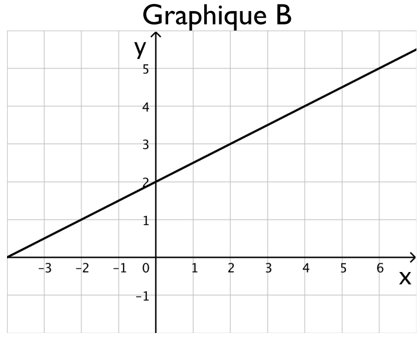
4. Associe chaque fonction avec la représentation graphique de sa réciproque.

Fonction 1	Fonction 2	Fonction 3
$y = -\frac{3x}{2} + 6$	$y = \frac{12}{x}$	$y = 2x - 4$

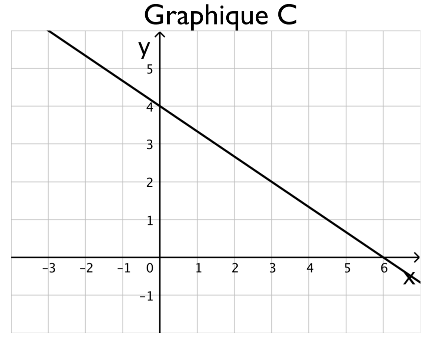
Graphique A



Graphique B



Graphique C



Réponse : Fonction 1 → Graphique ____ Fonction 2 → Graphique ____ Fonction 3 → Graphique ____

5. En vacances, Marie aimerait louer une planche à pagaie pour faire une excursion sur le lac. Les coûts associés à la location de la planche sont de 10 $ de l'heure auxquels on doit ajouter un montant de 2 $ pour la location de la veste de flottaison.

a) Quelle est la règle associée à cette situation si la variable indépendante est la durée de la location?

Réponse : ______________________

b) Quelle est la règle associée à cette situation si la variable indépendante est le coût de la location?

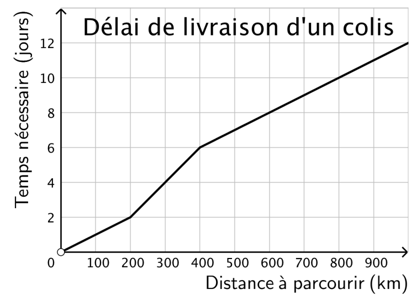
Réponse : ______________________

c) Quelle était la durée de l'excursion de Marie si elle a déboursé 37 $?

Réponse : ______________________

Mise en situation
La fonction définie par parties

Exemple :
Le délai de livraison d'un colis est influencé par la distance qu'il doit parcourir pour se rendre à destination. Le graphique ci-contre présente cette relation.



Le délai de livraison est défini à l'aide d'une fonction composée de trois parties selon l'intervalle dans lequel se situe la distance à parcourir (variable indépendante (x)).

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}01x & \text{si } x \in \;]0, 200] \\ 0{,}02x-2 & \text{si } x \in \; [200, 400] \\ 0{,}01x+2 & \text{si } x \in \; [400, +\infty[\end{cases}$$

a) Quel sera le délai de livraison pour un colis qui doit être livré à une distance de 520 km?

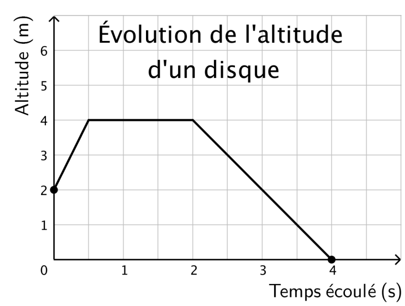
Réponse : ________________

b) Quelle distance un colis a-t-il parcourue s'il a été livré 9 jours plus tard?

Réponse : ________________

Exercices

1. Le disque golf est un sport qui se joue comme le golf traditionnel mais dans lequel le joueur lance un disque. L'objectif est de lancer le disque dans un panier en effectuant le moins de lancers possibles. Le graphique ci-contre présente l'évolution de l'altitude (en mètres) d'un disque selon le temps écoulé (en secondes) lors d'un lancer.



Cette situation peut être définie à l'aide de la fonction par parties suivante :

$$f(x)=\begin{cases} 4x+2 & \text{si } x \in \; [0; 0{,}5] \\ 4 & \text{si } x \in \; [0{,}5; 2] \\ -2x+8 & \text{si } x \in \; [2; 4] \end{cases}$$

a) Combien de temps dure ce lancer?

Réponse : ________________

b) À quelle distance du sol se trouve le disque trois secondes après avoir quitté les mains du lanceur?

Réponse : ________________

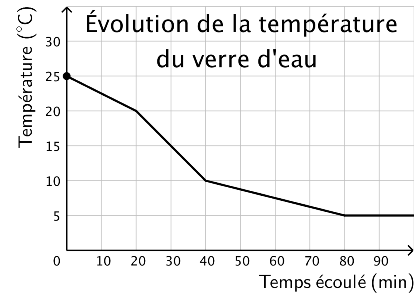
c) Pendant combien de temps le disque se trouve-t-il à une distance de quatre mètres du sol?

Réponse : ________________

d) Combien de temps dure la descente du disque?

Réponse : ________________

2. Lors d'une expérience, on remplit un verre d'eau à la température de la pièce et on le place au frigo. On observe la température de l'eau selon le temps écoulé.



Cette situation peut être définie à l'aide de la fonction par parties suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} + 25 & \text{si } x \in \quad [0, 20] \\ -\dfrac{x}{2} + 30 & \text{si } x \in \quad [20, 40] \\ -\dfrac{x}{8} + 15 & \text{si } x \in \quad [40,80] \\ \quad 5 & \text{si } x \in \quad [80, +\infty[\end{cases}$$

a) Quelle est la température minimale observée lors de cette expérience? Réponse : ________________

b) Quelle est la température de l'eau 28 minutes après le début de l'expérience?

Réponse : ________________

c) Combien de minutes se sont écoulées lorsque la température de l'eau est de 7 °C?

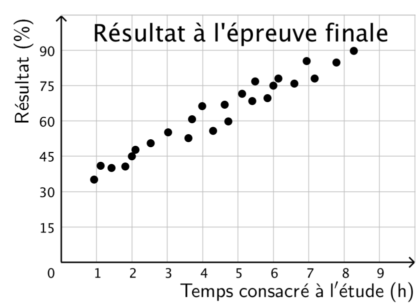
Réponse : ________________

Mise en situation

La modélisation à l'aide de la fonction affine et rationnelle

Exemple 1 :

Yasmine enseigne l'histoire au cégep et a eu l'idée de montrer à ses élèves les effets du temps consacré à l'étude pour la passation de l'épreuve finale. Le nuage de points ci-contre présente les résultats obtenus par les élèves d'un de ses anciens groupes à l'épreuve finale (en %) selon le temps consacré à l'étude (en heures).



Combien d'heures un élève devrait-il consacrer à ses études pour espérer obtenir un résultat d'au moins 80 %?

Étape 1 : Associer la situation à un type de fonction

Type de fonction → ____________________ → ________________

Étape 2 : Estimer une règle qui correspond à la situation selon le type de fonction identifiée

Déterminer la règle à l'aide de deux couples :

Taux de variation :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ =$$

Valeur initiale :

$y = \_\_\_\_ \cdot x + b$

$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ + b$

$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ + b$

$\_\_\_\_ = b$

Étape 3 : Utiliser la règle déterminée pour estimer une réponse

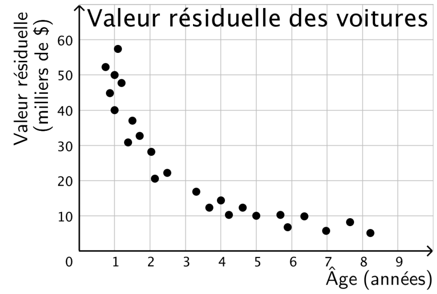
Règle : ________________

Réponse : ________________

Exemple 2 :

Ross travaille chez un détaillant de voiture usagées et a été mandaté pour répertorier les voitures à vendre. Il a construit le graphique ci-contre qui montre la valeur résiduelle des voitures d'un concessionnaire (en milliers de dollars) selon leur âge (en années).

À l'aide de ces informations, aide Ross à estimer la valeur résiduelle d'une voiture âgée de trois ans.



Étape 1 :
Associer la situation à un type de fonction

Type de fonction → ______________________ → _________________

Étape 2 :
Estimer une règle qui correspond à la situation selon le type de fonction identifiée

Déterminer la valeur du paramètre k (produit des variables x et y)

Estimer le paramètre k à l'aide de la moyenne des produits.

___ · ___ = ___

___ · ___ = ___

___ · ___ = ___

Moyenne des produits :

$k =$ ___

Étape 3 :
Utiliser la règle déterminée pour estimer une réponse

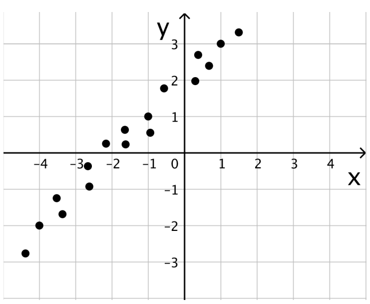
Règle : ____________________

Réponse : _________________

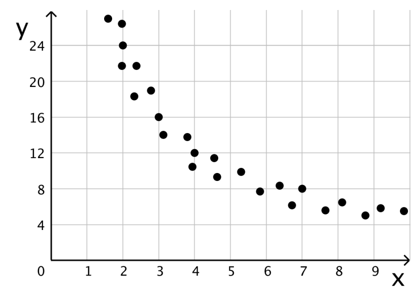
Exercices

1. Estime une règle qui peut être associée à une fonction qui modélise chaque nuage de points.

a)

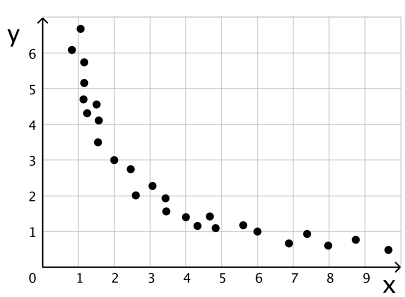


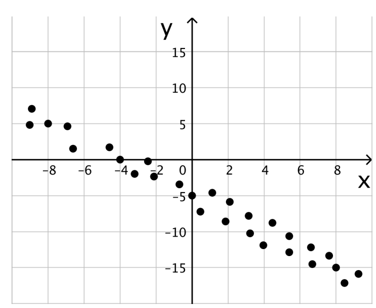
b)



Règle : ____________________

Règle : ____________________



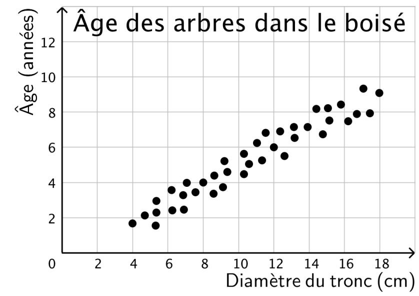


Règle : ____________________

Règle : ____________________

2. Dans le cadre d'un projet de recherche, on a demandé à Josée de produire un rapport sur l'âge des arbres dans un certain boisé. Le graphique ci-contre montre l'âge des arbres dans le boisé (en années) selon le diamètre de leur tronc (en cm).

À l'aide des résultats de Josée, à quel âge peut-on estimer un arbre dont le diamètre du tronc est de 25 cm?

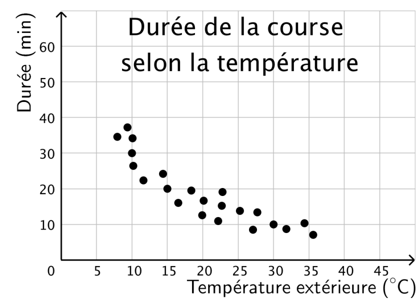


Réponse : ____________________

3. Solène est une nouvelle adepte de la course et décide de noter la durée de ses sorties (en minutes) selon la température extérieure (en °C). Le nuage de points suivant montre les données recueillies.

Demain, la température annoncée est de 24 °C.

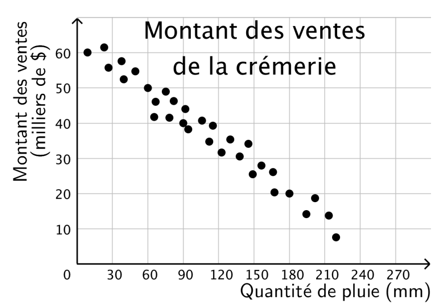
Quelle devrait être la durée de sa sortie?



Réponse : ____________________

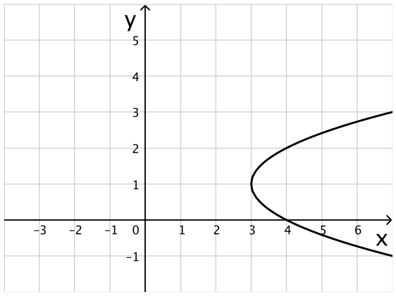
4. Afin d'analyser les effets des journées pluvieuses sur sa clientèle, une entreprise se spécialisant dans la vente de crème glacée a construit le nuage de points ci-contre. Il présente le montant des ventes de ses succursales (en milliers de dollars) selon la quantité de pluie reçue pendant l'été (en mm).

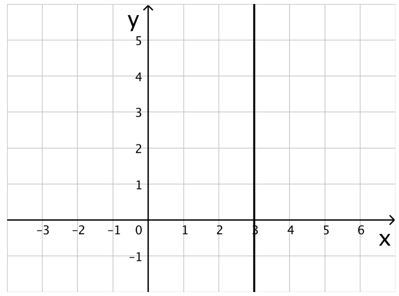
Une nouvelle succursale s'implantera l'été prochain dans une ville qui reçoit chaque été, en moyenne, 170 mm de pluie. À combien devrait s'élever les ventes de cette nouvelle succursale?

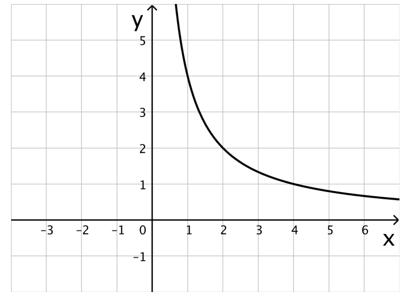


Réponse : ____________________

CORRIGÉ – La réciproque d'une fonction – Pages 1 à 3

1. a) 

b) 

c) 

2. **Fonction A et E** **Fonction B et D** **Fonction C et F**

3. a)
$$\begin{aligned} y &= 3x - 6 \\ x &= 3y - 6 \\ x + 6 &= 3y \\ \boldsymbol{\frac{x}{3} + 2} &= \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + 1 \\ x &= \frac{y}{2} + 1 \\ x - 1 &= \frac{y}{2} \\ \boldsymbol{2x - 2} &= \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y &= 12 - 4x \\ x &= 12 - 4y \\ x - 12 &= -4y \\ \boldsymbol{\frac{-x}{4} + 3} &= \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

4. **Fonction 1 → Graphique C** **Fonction 2 → Graphique A** **Fonction 3 → Graphique B**

5. a) $\boldsymbol{y = 10x + 2}$

b) <u>Stratégie proposée</u>
Trouver la réciproque de la règle trouvée en a).

$$\begin{aligned} y &= 10x + 2 \\ x &= 10y + 2 \\ x - 2 &= 10y \\ \frac{x - 2}{10} &= y \end{aligned}$$

<u>Réponse</u> : $\boldsymbol{y = \frac{x}{10} - \frac{1}{5}}$

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(37)}{10} - \frac{1}{5} \\ y &= \frac{35}{10} \\ y &= \mathbf{3,5} \text{ heures} \end{aligned}$$

<u>Réponse</u> : **3,5 heures**

CORRIGÉ – La fonction définie par parties – Pages 4 et 5

1. a) **4 secondes**

b) Stratégie proposée
Se référer aux intervalles donnés dans la règle. Le temps donné appartient à la troisième règle du graphique.

$$y = -2x + 8$$
$$y = -2(3) + 8$$
$$y = 2 \text{ m}$$

Réponse : **2 m**

c) $2 - 0{,}5 = \mathbf{1,5}$ **secondes**

d) $4 - 2 = \mathbf{2}$ **secondes**

2. a) **5 °C**

b)
$$y = -\frac{x}{2} + 30$$
$$y = -\frac{(28)}{2} + 30$$
$$y = 16 \text{ °C}$$

Réponse : **16 °C**

c)
$$y = -\frac{x}{8} + 15$$
$$7 = -\frac{x}{8} + 15$$
$$-8 = -\frac{x}{8}$$
$$64 = x$$

Réponse : **64 minutes**

CORRIGÉ – Modélisation à l'aide de la fonction affine et rationnelle – Pages 5 à 7

1. a) Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(-4,-2)$ et $(1,3)$

Taux de variation

$a = \dfrac{3 - -2}{1 - -4} = 1$

Valeur initiale

$$\begin{aligned} 3 &= 1(1) + b \\ 3 &= 1 + b \\ 2 &= b \end{aligned}$$

Règle : $y = x + 2$

Réponse : $\boldsymbol{y = x + 2}$

b) Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(2,24)$, $(3,16)$ et $(5{,}4;\ 10)$

Produits des variables x et y

$2 \times 24 = 48$

$3 \times 16 = 48$

$5{,}3 \times 10 = 53$

Valeur de k

$\bar{x} = \dfrac{48 + 48 + 53}{3} = \dfrac{53}{3} = 49{,}\bar{6}$

Règle : $y = \frac{49{,}\bar{6}}{x}$

Réponse : $\boldsymbol{y = \frac{49{,}\bar{6}}{x}}$

c) Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(2,3)$, $(4;\ 1{,}5)$ et $(6,1)$

Produits des variables x et y

$2 \times 3 = 6$

$4 \times 1{,}5 = 6$

$6 \times 1 = 6$

Valeur de k

$\bar{x} = \dfrac{6 + 6 + 6}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

Règle : $y = \frac{6}{x}$

Réponse : $\boldsymbol{y = \frac{6}{x}}$

d) Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(-8,5)$ et $(0,-5)$

$(0,5) \quad \rightarrow\ b = 5$

Taux de variation

$a = \dfrac{5 - -5}{-8 - 0} = \dfrac{10}{-8} = -\dfrac{5}{4} = -1{,}25$

Règle : $y = -1{,}25x - 5$

Réponse : $\boldsymbol{y = -1{,}25x - 5}$

2. Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(8,4)$ et $(12,6)$

Taux de variation

$a = \dfrac{6 - 4}{12 - 8} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$

Valeur initiale

$$\begin{aligned} 6 &= 0{,}5(12) + b \\ 6 &= 6 + b \\ 0 &= b \end{aligned}$$

Règle : $y = 0{,}5x$

Âge si le diamètre est de 25 cm

$y = 0{,}5(25) = 12{,}5$ années

Réponse : **12,5 années**

3. Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(30,10)$, $(15,20)$ et $(10,30)$

Produits des variables x et y
$30 \times 10 = 300$
$15 \times 20 = 300$
$10 \times 30 = 300$

Valeur de k
$$\bar{x} = \frac{300 + 300 + 300}{3} = \frac{900}{3} = 300$$

Règle : $y = \frac{300}{x}$

Durée de la sortie si la température est de 24°C
$$y = \frac{300}{(24)} = 12{,}5$$
Réponse : **$\mathbf{12,5}$ minutes**

4. Il existe plusieurs réponses possibles, selon les points choisis dans le nuage.

$(60, 50)$ et $(180, 20)$

Taux de variation
$$a = \frac{50 - 20}{60 - 180} = \frac{30}{-120} = -0{,}25$$

Valeur initiale
$$\begin{aligned} 50 &= -0{,}25(60) + b \\ 50 &= -15 + b \\ 65 &= b \end{aligned}$$

Règle : $y = -0{,}25x + 65$

Montant des ventes si 170 mm de pluie
$y = -0{,}25(170) + 65$
$y = 22{,}5$ milliers de **$**

$22{,}5 \times 1000 = 22\,500$ **$**

Réponse : **22 500 $**